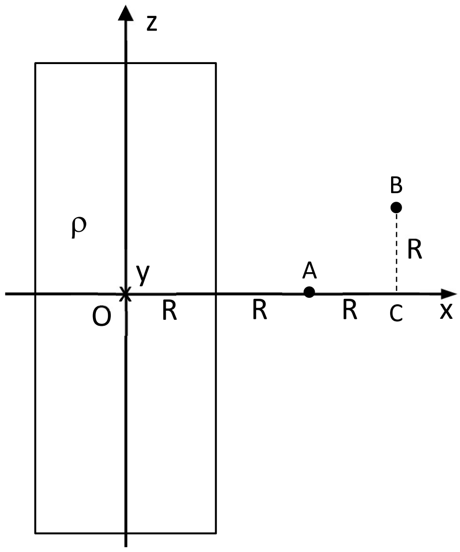
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Nel vuoto è posto un cilindro isolante, di costante dielettrica relativa ε_r, di sezione circolare avente raggio **R** e altezza molto maggiore del raggio. All'interno del cilindro è posta una distribuzione di carica di volume uniforme **ρ > 0.**
A) Indicare il verso e la direzione del campo elettrico in tutto lo spazio. Scrivere le espressioni del modulo del campo elettrico in funzione della distanza dall'asse del cilindro e farne il grafico. B) Scrivere l'espressione della differenza di potenziale $\Delta V = V(A) - V(B)$ esistente fra i punti A e B (vedi figura).



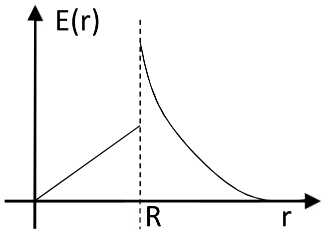
A) Per simmetria il campo $\overline{E}$ è radiale con coordinata r, e direzione $\hat{r}$, quindi $\overline{E}(r) = E(r) \cdot \hat{r}$.
Il campo elettrico si può calcolare utilizzando il teorema di Gauss applicato ad un cilindro di raggio r ed altezza h con l'asse coincidente con l'asse z del cilindro.

$$r < R: \quad \int_{r,h} \overline{E}(r) \cdot \overline{dS} = \frac{Q(r,h)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad ; \quad E(r) \cdot h \cdot 2\pi r = \int_{r,h} \frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \pi r^2 \cdot h \qquad \text{da cui si ha:} \qquad E(r) = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \therefore$$

$$r > R: \quad \int_{r,h} \overline{E}(r) \cdot \overline{dS} = \frac{Q(R,h)}{\varepsilon_0} \quad ; \quad E(r) \cdot h \cdot 2\pi r = \frac{\rho \cdot \pi R^2 \cdot h}{\varepsilon_0} \quad \text{da cui:} \qquad E(r) = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0 r} \quad \therefore$$

Il campo E è lineare per r<R e scende come 1/r per r>R, con una discontinuità in r=R tale che $E(R^+) > E(R^-)$.



B) $\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \overline{E}(r) \cdot \overline{dl} = \int_A^C \overline{E}(r) \cdot \overline{dx} + \underbrace{\cancel{\int_C^B \overline{E}(r) \cdot \overline{dz}}}_{=0} = \int_A^C E_x(r) dr =$

$$= \int_{2R}^{3R} \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0 r}\, dr = \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{3}{2} \quad \therefore$$

Si può anche dire che il campo, avendo simmetria radiale cilindrica, non ha componenti lungo l'asse z e quindi fare direttamente l'integrale fra il punto A e il punto C.

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Un anello toroidale a sezione circolare costante, di materiale ferroso isotropo e omogeneo, ha una lunghezza media L ed è posto in aria. Le dimensioni lineari della sezione trasversale sono molto minori della lunghezza L. Intorno all'anello è distribuito uniformemente un certo numero N di spire percorse da una corrente costante I. In queste condizioni la permeabilità magnetica relativa dell'anello è $\mu_r = 1000$.

A) Scrivere l'espressione del campo B all'interno dell'anello.

B) Scrivere l'espressione dal campo B', sempre all'interno dell'anello, se venisse eliminata una sottile fetta di spessore δ dell'anello.

C) Calcolare la variazione percentuale del campo B passando dal caso A al caso B.

Dati: L = 30 cm ; $\mu_r = 1 \cdot 10^3$; δ = 1 mm

A) Per calcolare il campo $\overline{B}$ si può utilizzare la legge di Hopkinson $F = R\phi$ dove: $F = NI$ e $R = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{L}{S}$ da cui si ha:

$$NI = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{L}{S} \cdot B \cdot S, \quad \text{quindi:} \quad \mathbf{B = \frac{N\,I}{L}\,\mu_0\mu_r} \quad \therefore$$

B) In questo caso la riluttanza R' è data dalla somma delle riluttanze nel ferro e nel vuoto (sono in serie):

$$R' = R(\text{ferro}) + R(\text{vuoto}) = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{L-\delta}{S} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{S} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{S}\left(\frac{L-\delta}{\mu_r} + \delta\right) \cong \frac{1}{\mu_0}\frac{\delta}{S}\left(\frac{L}{\mu_r} + \delta\right) = \frac{1}{\mu_0\mu_r \cdot S}(L + \delta\mu_r)$$

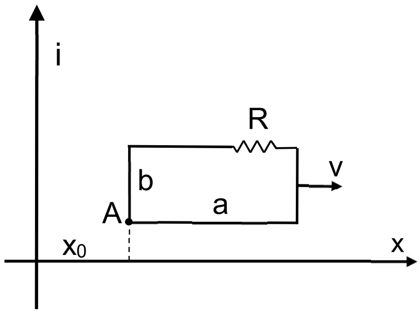
Da cui, essendo $NI = R' \cdot \phi(B') = R' \cdot B' \cdot S$, si ha che $\mathbf{B' = \frac{NI}{SR'} = \frac{NI\,\mu_0\mu_r}{L+\delta\mu_r}}$ $\therefore$

C) $$\frac{B' - B}{B} = \frac{\frac{1}{L+\delta\mu_r} - \frac{1}{L}}{\frac{1}{L}} = \frac{L}{L+\delta\mu_r} - 1 = -\frac{\delta\mu_r}{L+\delta\mu_r} = -\frac{10^3 \cdot 10^{-3}}{0{,}3+1} = -\frac{1}{1{,}3} \cong -0{,}71 = -71\,\% \quad \therefore$$

Il campo B diminuisce del 71% $\therefore$

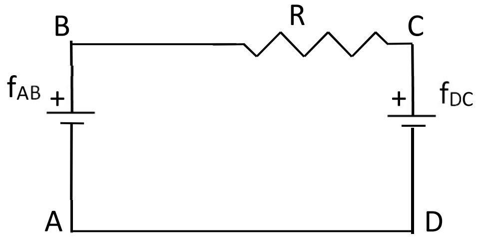
Esercizio n.3 **[10 punti]**

Nel vuoto è presente un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente costante **i.** Ad una distanza $x_0>0$ dal filo è posta inizialmente una spira rettangolare complanare al filo di lati **a** e **b** e di resistenza elettrica **R**. La spira viene allontanata dal filo con velocità costante **v** (vedi figura), la posizione della spira sia individuata dalla posizione del punto A.
A) Scrivere l'espressione della potenza dissipata nella spira in funzione della posizione della spira. B) Supponiamo ora di inserire nella spira una f.e.m. costante $\mathbf{f_0}$ di segno opposto alla f.e.m. totale indotta. Calcolare la posizione della spira per cui la corrente circolante risulta nulla.



Dati: a = 30 cm ; b = 20 cm ; i = 10 A ; v = 12 m/s ; L = 30 cm ; d = 15 cm ; f_0 = 8 μV.

A) La corrente i genera a distanza x dal filo un campo magnetico $B(x)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}$, perpendicolare al piano della spira, che da origine ad una f.e.m. indotta. La potenza dissipata è $P=f^2/R$ dove f è la f.e.m. indotta nella spira che dipende dalla posizione x della spira rispetto al filo, cioè dalla posizione del punto A.



I metodo: la forza di Lorentz sugli elettroni della spira crea due campi elettrici non conservativi lungo i due lati della spira paralleli al filo a cui corrispondono due campi elettrostatici che generano due f.e.m f_{AB} e f_{CD} opposte, e diverse in modulo. La f.e.m. totale sarà:

$$f=\text{f.e.m.}=f_{AB}-f_{CD}=\int_A^B E_L(x)dy-\int_C^D E_L(x+a)dy=b\cdot[v\,B(x)-vB(x+a]=bv\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x+a}\right)=$$

$$\frac{bv\mu_0\,i}{2\pi}\frac{a}{x(x+a)}=\frac{iv\,_0}{2\pi}\frac{S}{x(x+a)}$$ da cui si ha che: $$\mathbf{P}=\frac{\mathbf{f}^2}{\mathbf{R}}=\left[\frac{\mathbf{iv\mu_0}}{\mathbf{2\pi}}\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{x(x+a)}}\right]^2/\mathbf{R}\quad\therefore$$

II metodo: utilizzando la legge di Faraday-Neumann $f=-d\phi/dt$

Il campo B varia con la posizione x (vedi sopra), per avere il flusso totale va scritto il flusso infinitesimo e poi integrarlo per tutta la superficie della spira: $d\phi=dx\cdot b\cdot B(x)$ quindi: $\phi(x)=\int_x^{x+a}d\phi=\int_x^{x+a}b\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0 ib}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x}$ e

$$f=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{\mu_0 ib}{2\pi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{x+a}{x}\right)=-\frac{\mu_0 ib}{2\pi}\cdot\frac{x}{x+a}\cdot\frac{-a}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\mu_0 iS}{2\pi}\frac{v}{x(x+a)}$$ .....come sopra per il calcolo della potenza dissipata.

Il verso è tale da creare una corrente che circola nella spira in verso orario.

B) L'equazione del circuito con le due f.e.m. sarà: $f-f_0=RI$, se $I=0\ \rightarrow f=f_0$ da cui:

$$\frac{\mu_0 iS}{2\pi}\frac{v}{x(x+a)}=f_0$$, ponendo $c=\frac{\mu_0 iSv}{2\pi}$ si ha: $\frac{c}{x(x+a)}=f_0$ quindi:

$$\frac{c}{f_0}=x(x+a)=x^2+ax\ \text{ da cui }x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4c/f_0}}{2}=\frac{a}{2}\left[-1\pm\sqrt{1+4c/f_0a^2}\right]$$

La soluzione deve essere > 0, quindi $x=\frac{a}{2}\left[\sqrt{1+4c/f_0a^2}\ -1\right]=\frac{a}{2}\left[\sqrt{1+8}\ -1\right]=a=30\text{ cm}$

Nota: $4c/f_0a^2=\frac{4}{f_0a^2}\frac{\mu_0 iSv}{2\pi}=\frac{4\cdot4\pi\cdot10^{-7}\cdot10\cdot a\cdot20\cdot10^{-2}\cdot12}{2\pi\cdot8\cdot10^{-6}\cdot a\cdot a}=8$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.